

Funções Trigonométricas Inversas

Objetivos desse Capítulo

1. Pesquisar o significado das funções trigonométricas inversas
2. Usar a definição das funções trigonométricas inversas para resolver ângulos
3. Encontrar a solução do problema inverso, onde o ângulo contém termos adicionais.

Comandos Maple Usados Neste Capítulo

$\arcsin(y)$	A inversa de $y = \sin(\theta)$. O ângulo cujo seno é y .
$\arccos(y)$	A inversa de $y = \cos(\theta)$. O ângulo cujo cosseno é y .
$\arctan(y)$	A inversa de $y = \tan(\theta)$. O ângulo cuja tangente é y .
<code>plot</code>	Plot inverso das Funções Trigonométricas

O Necessário para as Funções Trigonométricas Inversas

Dado um ângulo, você pode calcular quaisquer das seis funções trigonométricas: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sec$, $\csc$ e $\cot$. Além disso, você pode avaliar essas funções trigonométricas para qualquer ângulo, grande ou pequeno, positivo ou negativo. Pergunte a si mesmo como o processo pode retornar. Se você conhece o valor da função trigonométrica, como você pode determinar o ângulo?

Esse não é um processo completamente direto. Pegue o exemplo específico de $\sin(x) = 1/2$. O que essa equação tem a ver com o ângulo x ? Você pode visualizar a situação construindo o gráfico da função seno $y = \sin(x)$ e a linha $y = 1/2$ no mesmo gráfico (veja a Figura 9.1).

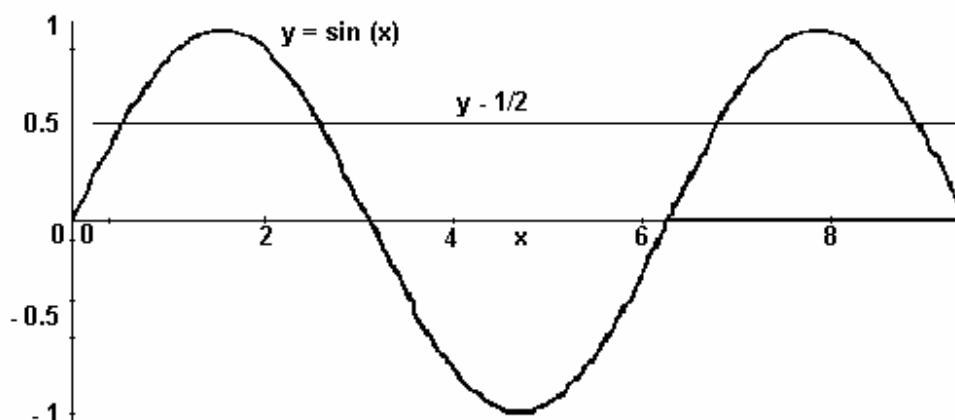


Figura 9.1 Os Ângulos os Quais $\sin(x) = 1/2$

A linha intercepta a curva seno em quatro pontos. Qualquer um desses ângulos tem sinal igual a $1/2$. Você pode continuar a curva seno indefinidamente em ambas as direções positivas e negativas de x e a linha irá continuar a interceptar a curva. Existe um número infinito de soluções para a equação $\sin(x) = 1/2$.

Nós podemos solucionar o problema de encontrar o ângulo, dando a função trigonométrica, por estes passos.

1. Expressar o problema como uma equação.
2. Decidir quais ângulos são relevantes para o problema. Você precisará ter informações adicionais sobre o ângulo que você está procurando, porque existe um número infinito de possibilidades.
3. Construa a função e os valores no mesmo gráfico. Escolha o intervalo que você escolheu no passo dois. Encontre os lugares onde a linha horizontal intercepta a função trig.
4. Leia os ângulos no eixo de x que correspondam a essas interseções. Estes são os valores que satisfazem a equação.

Vários problemas práticos envolvem a determinação do ângulo, dados os valores da função trigonométrica. Nós iremos ilustrar o processo com qualquer exemplo de sobrevivência. A uma sobrevivente foi dito que uma nova estrada está para ser construída para fornecer uma ligação de uma vila a outra. A estrada em questão atravessará diretamente a oeste por 1 milha, onde encontrará uma outra estrada indo diretamente para o norte.

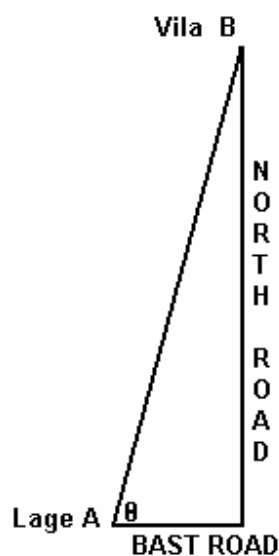


Figura 9.2 Qual é o ângulo θ ?

A outra vila é 3 milhas acima da estrada ao norte. É preciso que se coloque o seu trânsito em direção à outra vila para que a nova estrada possa ser construída ao longo da linha de visão. (Um trânsito é um telescópio que tem uma base giratória que mede ângulos).

A sobrevivente está na Vila A e deve transitar em um ângulo para a estrada leste. Ela aplica o procedimento descrito acima para encontrar o ângulo (veja Figura 9.2).

Passo 1: A estrada leste tem uma milha de comprimento e a norte tem 3 milhas de comprimento; portanto, a equação trigonométrica apropriada é $\tan(\theta) = 3/1 = 3$.

Passo 2: O ângulo θ deve estar entre 0 e 90°. (os ângulos em um trânsito não são medidos em radianos) O ângulo deve ser positivo.

Passo 3: Construa a função trigonométrica e seu valor. Desde que a função tangente possa crescer para aproximadamente 90° , restrinja o eixo y para acima de 3.

```
>plot( { tan(thetha), 3}, thetha = 0 .. Pi/2, 0 .. 35 );
```

Passo 4: O ângulo, como lido do gráfico, é $\theta = 1.25$. Nós temos usado a função tangente do Maple, para que o ângulo seja medido em radianos. O ângulo em graus é, portanto, $\theta = 1.25(180/\pi) = 71.6^\circ$ (veja Figura 9.3).

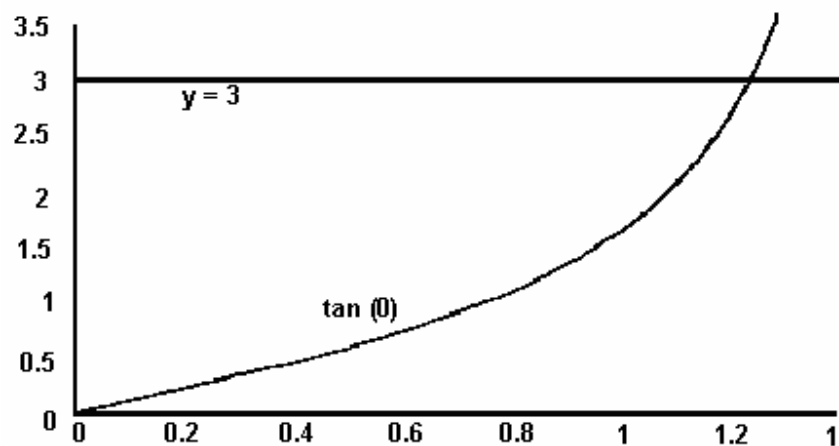


Figura 9.3 Solução para o problema do sobrevivente, $\tan(\theta) = 3$.

Encontrar o ângulo dado o valor trigonométrico é o inverso do problema de encontrar o valor trig dado o ângulo. De fato, nós temos usado as funções inversas cada vez que nós encontramos o ângulo, dados os comprimentos dos lados de um triângulo, como no problema acima. Esse "problema inverso" ocorre freqüentemente o suficiente a que essas funções tem sido dados nomes. Elas são funções sin, cos, e tan.

$$\theta = \arcsin(y) \text{ corresponde a } y = \sin(\theta) \quad (9.1)$$

$$\theta = \arccos(y) \text{ corresponde a } y = \cos(\theta) \quad (9.2)$$

$$\theta = \arctan(y) \text{ corresponde a } y = \tan(\theta) \quad (9.3)$$

Se as funções inversas são verdadeiramente funções, nós devemos restringir os possíveis valores de θ ; de outra forma, elas não irão ser de um único valor.

Os gráficos destas funções são obtidos girando o gráfico correspondente $\sin$, $\cos$ e $\tan$ para 90° (veja Figura 9.4, 9.5 e 9.6).

```
> plot( arcsin(y), y = -Pi/2 .. Pi/2);
```

```
> plot( arccos(y), y = -Pi/2 .. Pi/2);
```

```
> plot( arctan(y), y = -Pi/2 .. Pi/2);
```

O gráfico na Figura 9.6 não conta a história completa sobre a função $\arctan$. Toda essa função inversa será investigada em detalhes no laboratório maple nesse capítulo.

Exemplo 9.1

Resolva o exemplo 3-5 usando a funções trigonométricas inversas.

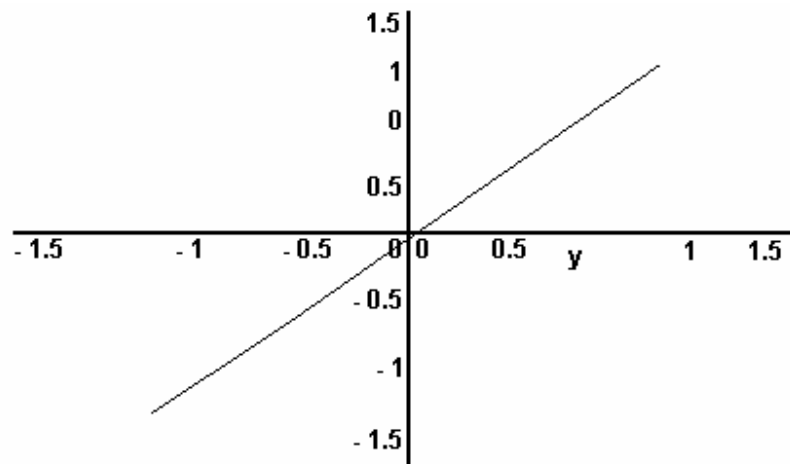


Figura 9.4 Gráfico de $\theta = \arcsin(y)$

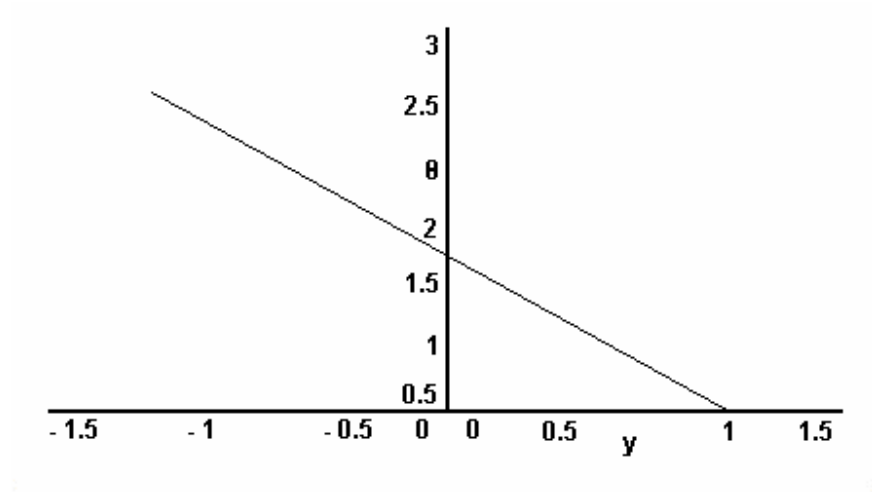


Figura 9.5 Gráfico de $\theta = \arccos(y)$

Solução. O diagrama para esse problema é mostrado na Figura 5.6, onde $y = 6.23$ e $x = 14.5$. Desde que $\tan(\theta) = 6.23/14.5 = 0,430$, $\theta = \arctan(0.430) = 23.7^\circ$. O ângulo $\alpha = 90^\circ - \theta = 90 - 23.27 = 66.73^\circ$, e $r = x/\cos(\theta) = 15.8$.

Sua Vez. Resolva o Exemplo 3 - 5 usando as funções trigonométricas inversas onde $y = 10.22$ e $x = 7.35$.

Resposta: _____

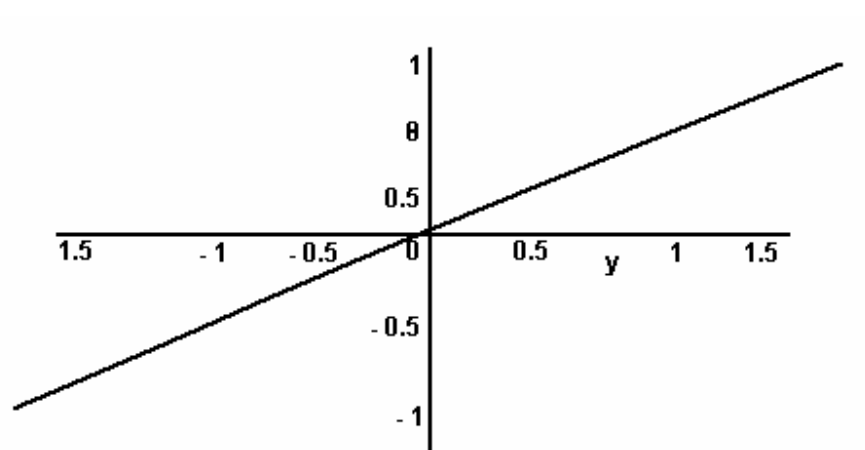


Figura 9.6 Gráfico de $\theta = \arctan(y)$

Exemplo 9 - 2

Solucione θ no Exemplo 5-5.

Solução. Revise o Exemplo 5 - 5 para ver que nós derivamos a equação $\cos(\theta) = 0.7054$. Conhecendo o valor da função coseno, nós encontramos θ avaliando $\theta = \arccos(0.7054) = 45.14^\circ$ essa é a mesma resposta que nós encontramos por tentativa e erro no Exemplo 5 - 5.

Sua Vez. Resolva o Exemplo 5 - 5 para θ usando as funções trigonométricas inversas, onde $a = 55.3$ m, $b = 75.25$ m e $c = 127$ m. Depois de encontrar θ , encontre h .

Resposta: $\theta =$ _____

Resposta: $h =$ _____

Encontrando o Tempo quando uma Função Trigonométrica Alcança um Valor Específico.

Considere um problema que você irá encontrar se usar a função trigonométrica para descrever oscilações de algum tipo. Elas podem ser vibrações mecânicas ou sinais de correntes alternadas em eletrônica. A lista das aplicações possíveis é muito grande.

Aqui está um exemplo típico:

Uma corrente alternada é dada pela forma

$$i(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = 110 \sin(120\pi t + 1.600)$$

A *amplitude* da curva é 110 miliamperes (mA) e a frequência é 60 hertz (Hz). Existe também o termo *fase* (α), o qual nesse caso é 1.600 radianos.

Nós queremos encontrar o *menor* tempo *positivo* quando a corrente é 55 mA.

Solução: o primeiro passo não causa nenhum problema. Nós inserimos a equação como:

>eq2 := sin(120*Pi*t + 1.6) = 0.5;

$$\text{eq2} := \sin(120\pi t + 1.6) = .5$$

Desde que nós possamos definir um ângulo θ como $\theta = 120\pi t + 1.6 = 120\pi t + 5\pi/6$, nós chegaremos à simples equação

> sin(thetha) = 1/2;

A solução para θ é:

> thetha = arcsin(1/2);

$$\theta = \frac{1}{6}\pi$$

Nós podemos resolver t :

>solve(eq3, t);

$$\frac{-1}{180}$$

Nós temos encontrado t como sendo $-1/180$ s. Nós temos a solução a (uma de um número infinito), mas o tempo é mais negativo do que positivo!

Como nós podemos usar essa solução para encontrar todas as outras soluções? Em particular, como nós usamos essa solução para encontrar uma para o menor tempo positivo? Observe o que nós temos encontrado: o ângulo θ é $\pi/6$, ou 30° . Esse é o menor ângulo positivo que satisfaz a equação

$\sin(\theta) = 1/2$. Se θ aumentar, existirão outros valores para os quais $\sin(\theta) = 1/2$? Pense no ângulo tornando-se maior através do tempo. Depois disso tudo, é isso que a equação original está dizendo! Depois de algum tempo θ era igual a $\pi/6$, isto irá fazer uma oscilação completa. Nós adicionamos 2π a $\pi/6$ para obter $\theta = \pi/6 + 2\pi$. Confira o seno desse novo ângulo usando o Maple:

```
>sin(Pi/6 + 2*Pi);
```

$$\frac{1}{2}$$

O Maple imediatamente reduz o ângulo ao ângulo de referência, e calcula que o resultado é ainda $1/2$. Mas nós precisamos executar uma oscilação completa antes de a função seno repetir o valor $1/2$? Examine os dois ângulos θ e $\pi - \theta$ na Figura 10.2(p.216):

O valor da função seno é y/r . Qualquer altura y no Quadrante 1 (Q1) tem uma altura igual no Q2 e, portanto, o mesmo seno. Se o menor ângulo é θ , o maior ângulo é $\pi - \theta$. Confira o diagrama para verificar esse fato. Nós vemos que temos uma lista de sucessivos ângulos maiores, θ , $\pi - \theta$, $\theta + 2\pi$, $3\pi - \theta$, $\theta + 4\pi$ e assim por diante. Todos esses ângulos solucionam a equação original.

Se nós usamos $\pi - \theta$ ao invés de θ em nosso problema aqui, nós chegamos à equação (lembre-se, nós encontramos θ como sendo $\pi/6$):

```
>eq4 := 120*Pi*t + 5*Pi/6 = Pi - Pi/6;
```

$$eq4 := 120 \pi t + \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

```
>eq4 := 120*Pi*t + 5*Pi/6 = Pi - Pi/6;
```

0

```
>solve( eq4, t);
```

Portanto, o corrente é 55mA em $t = 0$. Desde que 0 seja algo considerado número positivo, é o menor tempo positivo quando o corrente é 55mA.

Qual é o próximo tempo maior quando a corrente é novamente 55mA? Use o próximo valor na sequência para o ângulo:

>eq5 := 120*Pi*t + 5*Pi/6 = 2*Pi + Pi/6; solve(eq5, t);

$$eq5 := 120 \pi t + \frac{5}{6} \pi = \frac{13}{6} \pi$$

$$\frac{1}{90}$$

Portanto, $t = 1/90$ s (ou $t = 0.01111$ s ou 11.1 ms).

Revisão: para resolver a equação $A \sin(\omega t + \alpha) = B$ para t :

1. Deixe $\theta = \omega t + \alpha$. A equação dada simplifica $A \sin(\theta) = B$.

2. Escreva a equação como $\sin(\theta) = \frac{B}{A}$, $\therefore \theta = \arcsin\left(\frac{B}{A}\right)$ e resolva θ .

3. Entenda que se θ é uma solução, então é θ , $\pi - \theta$, $\theta + 2\pi$, $3\pi - \theta$, $\theta + 4\pi$ e assim por diante. Você pode derivar uma sequência de equações cujo lado direito aumente constantemente como a sequência continua. Como você subtrai α de uma quantidade aumentada, você deve alcançar um ponto onde o resultado seja 0 ou um número positivo. Nesse ponto, você tem a solução para o menor tempo positivo.

Lápis e Papel

LP – 1

Entenda que $-\pi \leq \theta < \pi$. Encontre θ em radianos, dados:

(a) $\sin(\theta) = 0.4379$

Resposta: _____

(b) $\cos(\theta) = 0.0037$

Resposta: _____

(c) $\tan(\theta) = 4.379$

Resposta: _____

(d) $\sin(\pi - \theta) = 0.5555$

Resposta: _____

(e) $\cos(\pi - \theta) = -0.4349$

Resposta: _____

(f) $\tan(\pi - \theta) = -1.732$

Resposta: _____

LP – 2

Entenda que $-180 \leq \theta < 180$. Encontre θ em graus, dados:

(a) $\sin(\theta) = 0.4866$

Resposta: _____

(b) $\cos(\theta) = -0.5$

Resposta: _____

(c) $\tan(\theta) = 3.732$

Resposta: _____

(d) $\sin(90 - \theta) = 0.9659$

Resposta: _____

(e) $\cos(90 - \theta) = 0.1736$

Resposta: _____

(f) $\tan(90 - \theta) = 0.1763$

Resposta: _____

LP – 3

Encontre θ , sabendo que ele está em um dado quadrante. Responda em graus.

(a) Q4 e $\sin(\theta) = -0.139$

Resposta: _____

(b) Q3 e $\cos(\theta) = -0.9397$

Resposta: _____

(c) Q2 e $\tan(\theta) = -1.428$

Resposta: _____

LP – 4

Encontre θ , sabendo que ele está em um dado quadrante. Responda em radianos.

(a) Q3 e $\sin(\theta) = -0.93969$

Resposta: _____

(b) Q4 e $\cos(\theta) = 0.01745$

Resposta: _____

(c) Q2 e $\tan(\theta) = -2.747$

Resposta: _____

Laboratório Maple

LM – 2

Encontre θ , dados

$$\frac{\sin(\theta) + 0.5}{\cos(\theta)^2 + 1.4} = 0.4153$$

(a) Encontre um valor de θ que solucione a equação pelos métodos algébricos do Maple:

Resposta: _____

(b) Verifique a sua solução contruindo gráficos e encontrando ao menos duas outras soluções gráficas:

Resposta: _____

LM – 2

Use a fórmula $i(t) = I_{\max} \sin(2\pi f t)$ e o Maple para encontrar:

(a) i , dados $I_{\max} = 50A$, $f = 1000 \text{ Hz}$ e $t = 0.0025 \text{ s}$ (2.5 ms).

(b) t , dados $I_{\max} = 10mA$, $f = 10 \text{ kHz}$ e $i = 1mA$. A sua solução é o menor t positivo que satisfaz as condições dadas?

Resposta: _____

(c) f , dados $i = 2 \text{ mA}$, $I_{\text{max}} = 10 \text{ A}$, $t = 0.001 \text{ s}$ (1 ms). A sua solução é a menor frequência que satisfaz a equação? Observe que f deve ser um número positivo.

Resposta: _____

LM – 3

Durante um terremoto, o deslocamento de um ponto de um prédio foi dado por

$$d = 100 \sin(250\pi t + \frac{1}{3}\pi)$$

O deslocamento máximo foi 100 mm (aproximadamente 4 em). (Deslocamento é a distância de um ponto da localização anterior)

(a) Encontre o deslocamento em $t = 30 \text{ ms}$.

Resposta: _____

(b) Encontre o menor tempo positivo para o qual $d = 45 \text{ mm}$.

Resposta: _____

LM – 4

A engenharia eletrônica sabe que é possível expressar ondas complexas como somas de termos seno. Considere a seguinte onda complexa:

$$v(t) = 10 \sin(120\pi t) + 3.1 \sin(240\pi t) + 7.5 \sin(360\pi t)$$

Encontre uma solução gráfica para o menor tempo positivo quando a voltagem $v(t)$ é igual a 15 volts (V). Aqui estão os passos que você deve seguir:

1. Nomeie a equação v .

Resposta: _____

2. Use o comando *plot*: `> plot(v, t = -1/180 .. 1/60);`

3. Leia a solução do gráfico.

Resposta: _____

Explorações

Pense sobre como você pode tentar uma solução algébrica para a última questão, LM9 – 4. Você sabe que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Como uma preliminar para essa exploração, veja se você pode mostrar que

$$\sin(3x) = 2\sin(x)\cos(x)^2 + \sin(x)(\cos(x)^2 - 1)$$

1. Faça a substituição $x = 120\pi t$ em $v(t) = 10 \sin(120\pi t) + 3.1 \sin(240\pi t) + 7.5 \sin(360\pi t)$.

2. Expresse $\sin(240\pi t) = \sin(2x)$ em termos de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

3. Expresse $\sin(360\pi t)$ em termos de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

4. Insira as amplitudes dadas e simplifique a equação resultante.

5. Tente resolver o problema explícito, ou use o comando *fsolve*.

6. Tendo resolvido x , encontre t .

7. Comente sobre a sua solução. Se tudo que você encontrou para o menor tempo positivo, a solução analítica foi melhor do que a solução gráfica?